L3 MASS U1CD35 | Université Paris Diderot
Calcul différentiel | 2012 - 2013

Vendredi 18 janvier 2013 **Examen**

Durée : 3 heures.

Documents, calculettes et portables non autorisés. Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Le sujet comporte trois pages. Le barême est donné à titre indicatif.

Question de cours (4 points - aucune démonstration n'est exigée).

1. Énoncer le théorème de Heine.

2. Donner deux exemples de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soient (E, d) un espace métrique. Soient $f : E \to E$ et $f_n : E \to E$, pour $n \in \mathbb{N}$. Donner la définition de : "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E".

4. Donner un exemple de fonction continue et pas Lipschitzienne.

Exercice 1. (5 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $f : E \to E$ vérifiant la propriété suivante : il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\big(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|\big). \qquad (*)$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe dans E.

2. Le but de cette question est de montrer l'existence d'un point fixe pour f. Soit $x_0 \in E$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\|$.
b) En déduire que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge.
c) En déduire qu'il existe $\ell \in E$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
d) En utilisant $(*)$, montrer que $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2. (5 points) Les parties (I) et (II) sont indépendantes.

Dans cet exercice on considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^2 - 4z^2$.

Partie (I)

1. Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.

2. f est-elle convexe ?

3. Montrer que f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^3$.

Partie (II)

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2e^y + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Montrer que E est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$.

5. Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sur E.

6. Soit $M = (x, y, z)$ un point d'extremum global de f sur E.
a) Énoncer le théorème des extrema liés au point M.
b) On suppose dans cette question que $M = (x, y, z)$ est un point d'extremum global sur E qui vérifie $x = 0$. Montrer qu'alors $M = (0, 1, 0)$ ou bien $M = (0, -1, 0)$ ou bien $M = (0, 0, 1)$ ou bien $M = (0, 0, -1)$.
c) On suppose dans cette question que $M = (x, y, z)$ est un point d'extremum global sur E qui vérifie $x \neq 0$. Montrer qu'alors $M = (-\sqrt{-2y_0e^{-y_0}}, y_0, 0)$ ou bien $M = (\sqrt{-2y_0e^{-y_0}}, y_0, 0)$, où $y_0 = 1 - \sqrt{2}$.

7. En déduire le ou les points d'extremum global de f sur E.

Exercice 3. (8 points) Les parties (II) et (III) sont indépendantes.

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille n. Pour $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|M\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|.$$

Partie (I)

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet dorénavant que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \|MN\| \leq \|M\|\|N\|.$$

On rappelle que la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \quad \|\varphi\|_{op} = \sup_{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\|\varphi(M)\|}{\|M\|}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| \leq 1/2$. On définit l'application

$$\Phi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|) \to (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|), \quad M \mapsto \Phi(M) = \mathrm{tr}(M)A + M^3.$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est différentiable en M, avec

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad d\Phi(M)(H) = \mathrm{tr}(H)A + M^2H + MHM + HM^2.$$

Partie (II)

Pour $r > 0$ on considère

$$F_r = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ \|M\| \leq r\}.$$

3. Justifier que (F_r, d) est une partie complète de l'espace métrique $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d)$, où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

4. Montrer que $\|\Phi(M)\| \leq \|A\|\|M\| + \|M\|^3$. Montrer que si $M \in F_r$ on a $\|\Phi(M)\| \leq (\frac{1}{2} + r^2)r$. En déduire qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $0 < r \leq r_0$ on a $\Phi(F_r) \subset F_r$.

5. a) Montrer que $\|d\Phi(M)\|_{op} \leq \|A\| + 3\|M\|^2$.

b) Montrer que pour $(M, N) \in F_r^2$ on a $\|\varphi(M) - \varphi(N)\| \leq (\frac{1}{2} + 3r^2)\|M - N\|$.

c) En déduire qu'il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $0 < r \leq r_1$ l'application Φ est une contraction sur F_r.

6. Montrer qu'il existe $r_2 > 0$ tel que Φ a un unique point fixe dans F_{r_2}.

Partie (III)

7. En écrivant $M = I_n + M - I_n$, montrer que

$$\|d\Phi(M) - 3I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\|_{op} \leq \|A\| + 6\|M - I_n\| + 3\|M - I_n\|^2,$$

où $I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est l'identité de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$: $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(H) = H$.

8. On considère la boule ouverte $B = B(I_n, 1/3)$. Soit $M \in B$. Montrer que $d\Phi(M)$ est un isomorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Soit $\Psi(M) = \Phi(M) - 3M$. Montrer que pour $(M, N) \in B^2$ on a $\|\Psi(M) - \Psi(N)\| \leq \frac{17}{6}\|M - N\|$.

10. En déduire que Φ est injective sur B.

11. Conclure que Φ est un C^1-difféomorphisme global de B dans $\Phi(B)$.